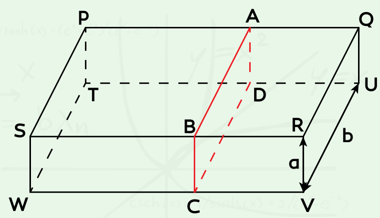
داود معصومی‌مهوار

ریاضی گره‌گشا

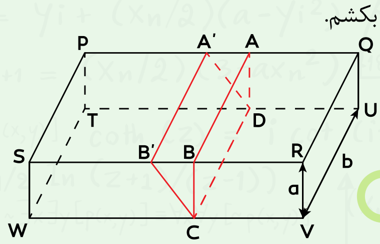
قسمت اول

من: امروز با یک مسئلهٔ واقعی شروع می‌کنیم. من یک جعبهٔ مقوایی داشتم که با نخ پلاستیکی آن را محکم بسته بودم. وقتی خواستم آن را باز کنم، به ذهنم زد که نخ پلاستیکی را پاره نکنم و سالم جدا کنم تا با استفاده‌های بعدی از آن، آسیب کمتری به طبیعت بزنم.



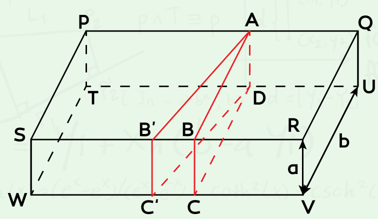
جعبه و نخ پلاستیکی قرمز رنگ

نخ پلاستیکی خیلی محکم بود و سؤالی به ذهنم رسید: نخ را در کدام جهت بکشم که راحت‌تر و زودتر از دور جعبه بیرون بیاید؟ مثلاً یک حالت این است که ابتدا تلاش کنم نخ AB را به سوی یک طرف جعبه بکشم.



حالت الف) نخ AB کشیده شده و به A'B' رسیده است

و حالت دیگر این است که تلاش کنم نخ BC را جابه‌جا کنم.



حالت ب) نخ BC کشیده شده و به B'C' رسیده است

روشن است که نخ پلاستیکی با توجه به زوری که من دارم، تنها مقدار مشخصی کش می‌آید و من در هر حالت با تکرار تلاش خواهم کرد نخ را بیرون بیاورم. مثلاً در همین حالت دوم، بعد از اینکه نخ BC به B'C' رسید، سراغ AD خواهم رفت و آن را می‌کشم تا جابه‌جا شود. حالا سؤالم این است: کدام روش زودتر به نتیجه می‌رسد؟ کم‌کم BC و AD را جابه‌جا کنم؟ یا بهتر است کم‌کم AB و CD را جابه‌جا کنم؟

سایه: واقعاً فرقی دارند؟ نخ در هر دو حالت به یک اندازه کش می‌آید. چرا باید نتیجه متفاوت باشد؟ به نظر من مهم‌تر این است که نخ را به سوی وجه QRVU بکشید، چون به این وجه نزدیک‌تر است.

من: اینکه باید به سمت وجه QRVU بکشیم، کاملاً درست است. اما من شکل را یک بار در این حالت کشیدم، برخی از پاره‌خط‌ها مانند CD و CB' نزدیک به هم دیده شدند. بنابراین شکل را این جوری (مانند حالت الف) کشیدم. ولی ما محاسبه‌ها را برای یک بار کشش انجام خواهیم داد و تفاوتی ندارد که کشش را در شکل، در کدام سو نمایش بدهیم.

مریم: من فکر می‌کنم ابتدا باید تغییر شکل حاصل از کشیدن نخ را به زبان ریاضی بیان کنیم تا بدانیم دربارهٔ چه چیزی حرف می‌زنیم. پیش از این کار هر قضاوتی دربارهٔ ساده‌بودن هر روش یا یکسان‌بودن دو روش را بیخودی و شتاب‌زده می‌دانم.

اعظم: با مریم موافقم. من فرض کردم در هر دو حالت مقدار BB' برابر با t باشد. سپس حساب کردم که در هر حالت کل نخ چقدر کشیده است.

$$\overline{A'B'CD} = 2\overline{CD} + 2\overline{B'C} = 2b + 2\sqrt{\overline{CB}^2 + \overline{BB'}^2} = 2b + 2\sqrt{a^2 + t^2}$$

$$\overline{AB'C'D} = 2\overline{AD} + 2\overline{AB'} = 2a + 2\sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BB'}^2} = 2a + 2\sqrt{b^2 + t^2}$$

من سؤال شما را این‌طور بیان می‌کنم که وقتی نخ را در هر دو حالت چنان بکشیم که BB' برابر با t شود، در این صورت افزایش طول نخ در یک حالت $2b + 2\sqrt{a^2 + t^2}$ و در حالت دیگر $2a + 2\sqrt{b^2 + t^2}$ خواهد بود. ما باید بررسی و قضاوت کنیم که کدام یک از این دو مقدار کمتر است؟ مقدار کمتر مربوط به وقتی است که برای جابه‌جایی نخ به اندازهٔ t، ما کمتر نیاز داریم کل نخ کشیده شود. پس یعنی این حالت ساده‌تر و بهتر است. حالا باید این دو مقدار را با هم مقایسه کنیم.

زهرا: من بر اساس بیان مریم کار کردم. در هر دو حالت طول نخ در ابتدا برابر با 2b+2a است، ولی وقتی کشیده می‌شود به $2b + 2\sqrt{a^2 + t^2}$ و $2a + 2\sqrt{b^2 + t^2}$ می‌رسد. به عبارت دیگر می‌توانیم تغییر طول نخ در هر حالت را چنین محاسبه کنیم:

$$2b + 2\sqrt{a^2 + t^2} - (2a + 2b) = 2b + 2\sqrt{a^2 + t^2} - 2a - 2b = 2(\sqrt{a^2 + t^2} - a)$$

$$2a + 2\sqrt{b^2 + t^2} - (2a + 2b) = 2a + 2\sqrt{b^2 + t^2} - 2a - 2b = 2(\sqrt{b^2 + t^2} - b)$$

پس کار روشن شد. باید فرض کنیم که مثلاً a از b کوچک‌تر است و تلاش کنیم و ببینیم کدام یک از دو مقدار $2(\sqrt{a^2+t^2}-a)$ و $2(\sqrt{a^2+t^2}-a)$ کوچک‌تر است. هر کدام کوچک‌تر بود مربوط به حالت ساده‌تر و بهتر است.

نفیسه: من حس می‌کردم که قضاوت سایه درست نیست و این دو حالت با هم فرق دارند. اثبات این موضوع به نظرم ساده نبود و بنابراین تلاش کردم بر اساس محاسبه‌های زهرا پیش بروم. من فرض کردم a برابر با ۱۰ و b برابر با ۳۰ باشد و برای مقایسهٔ $2(\sqrt{10^2+t^2}-10)$ و $2(\sqrt{30^2+t^2}-30)$ چنین کاری کردم:

$$\sqrt{30^2+t^2}>30$$
$$40\sqrt{30^2+t^2}>1200$$
$$0>1200-40\sqrt{30^2+t^2}$$
$$100+t^2>100+t^2+800+400-40\sqrt{30^2+t^2}$$
$$100+t^2>900+t^2+400-40\sqrt{30^2+t^2}$$
$$10^2+t^2>(\sqrt{30^2+t^2}-20)^2$$
$$(\sqrt{10^2+t^2})^2>(\sqrt{30^2+t^2}-20)^2$$
$$(\sqrt{10^2+t^2})^2-(\sqrt{30^2+t^2}-20)^2>0$$
$$((\sqrt{10^2+t^2})+(\sqrt{30^2+t^2}-20))(\sqrt{10^2+t^2}-(\sqrt{30^2+t^2}-20))>0$$
$$\sqrt{10^2+t^2}-(\sqrt{30^2+t^2}-20)>0$$
$$\sqrt{10^2+t^2}>(\sqrt{30^2+t^2}-20$$
$$\sqrt{10^2+t^2}-10>(\sqrt{30^2+t^2}-30)$$

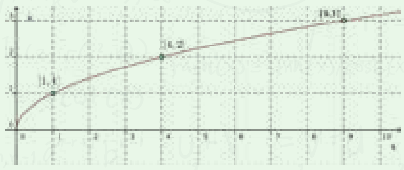
یعنی در این مثال، دو حالت با هم فرق می‌کنند و برای ایجاد فاصلهٔ BB' یا همان t بهتر است که مانند حالت الف کار کنیم نه حالت ب.

من: مثال نفیسه عالی بود. به‌سادگی می‌توان ۱۰ و ۳۰ را از محاسبه‌های او برداشت و آن‌ها را مثلاً با a و b جایگزین کرد. دردسری نخواهیم داشت. از طرف دیگر می‌دانم که بعضی‌ها برای چه دستشان را بالا برده‌اند. می‌پرسند نفیسه چرا از $\sqrt{30^2+t^2}>30$ شروع کرد و از کجا مطمئن بود که خواهد رسید به:

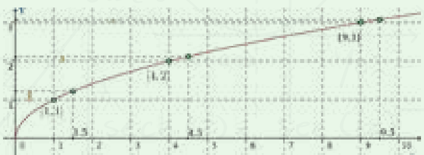
$$\sqrt{100+t^2}-10>(\sqrt{30^2+t^2}-30)$$

اعظم: موضوع تکراری است. نفیسه در چرک نویس خود از $\sqrt{100+t^2}-10>(\sqrt{30^2+t^2}-30)$ شروع کرد و به $\sqrt{30^2+t^2}>30$ رسید، ولی وقتی خواست استدلال کند از یک موضوع درست، یعنی: $\sqrt{30^2+t^2}>30$ شروع کرد و با دلایل خود به $\sqrt{100+t^2}-10>(\sqrt{30^2+t^2}-30)$ رسید. پیش‌تر با همین موضوع برخورد داشتیم و بحث مفصلی صورت گرفته بود. (مطلب «فرض در لباس حکم» در شمارهٔ ۱۲۲ برهان)

الهام: شاید بحث را منحرف می‌کنم! اما من جور دیگری فکر کردم. من $\sqrt{x}$ را بررسی کردم. دیدم که داریم $\sqrt{30^2+t^2}-30$ یعنی $\sqrt{30^2+t^2}-\sqrt{30^2}$ را بررسی می‌کنیم و هدفمان مقایسهٔ آن با $\sqrt{10^2+t^2}-\sqrt{10^2}$ است. در حقیقت می‌خواهیم بدانیم با اضافه‌کردن مقدار t^2 به x مقدار $\sqrt{x}$ چه موقعی بیشتر رشد می‌کند؟ وقتی x برابر با ۱۰ باشد؟ یا وقتی x برابر با ۳۰ باشد؟ پس به کمک یک نرم‌افزار منحنی $y=\sqrt{x}$ را کشیدم و دیدم این شکلی است:



خب من در همین سه نقطهٔ ۱، ۴ و ۹ بررسی کردم که اگر به جای این مقدارها مقدارهای ۱/۵، ۴/۵ یا ۹/۵ را بررسی کنیم و جذر آن‌ها را بگیریم، در کدام حالت رشد بیشتری داریم؟ کدام یک از مقدارهای $\sqrt{1}-\sqrt{1/5}$، $\sqrt{4}-\sqrt{4/5}$ و $\sqrt{9}-\sqrt{9/5}$ بیشتر هستند؟ شکل را ببینید:



پاره خط نارنجی اول که بزرگ‌تر است $\sqrt{1}-\sqrt{1/5}$، دومی $\sqrt{4}-\sqrt{4/5}$ و سومی $\sqrt{9}-\sqrt{9/5}$ را نشان می‌دهد. واضح است که رفته‌رفته با بزرگ‌تر شدن x این تفاوت‌ها کمتر می‌شوند. پس نتیجه‌گیری من هم همان است که نفیسه گفت. یعنی چون ۱۰ کوچک‌تر از ۳۰ است، به جابه‌جایی بیشتری با نام BB' منجر می‌شود و این حالت بهتر است.

من: ببین الهام، دو مشکل اساسی در گفته‌های تو هست. اول اینکه ما با نمودار منحنی‌ها آشنا نیستیم و چیزی دربارهٔ آن‌ها نخوانده‌ایم. دوم اینکه نرم‌افزارها قابل اطمینان نیستند و آنچه به ما می‌گویند حقیقت محض نیست و حتی گاهی اشتباه می‌کنند و تکیه به آن‌ها استدلال نیست. مثلاً اگر از شما بخواهم ثابت کنید $\sqrt{5}$ از ۳ کوچک‌تر است، حق ندارید بنا بر گفتهٔ ماشین حساب استدلال کنید که $\sqrt{5}\simeq 2/2360679977$ است و بنابراین از ۳ کوچک‌تر است! استدلال این است که مثلاً $\sqrt{5}$ را با $3=\sqrt{9}$ مقایسه کنید و با استناد به قضیه‌های ریاضی کوچک‌تر بودن $\sqrt{5}$ را نتیجه بگیرید.

فرخنده: من کمی به گفته‌ها و نتیجه‌گیری‌هایمان شک دارم. آنچه شما در آغاز پرسیدید این بود که نخ با توجه به زوری که ما داریم، مثلاً به مقدار مشخص s، کش می‌آید و بلندتر می‌شود و قرار بود بررسی کنیم و ببینیم در کدام یک از حالت‌های الف و ب این کش‌آمدن باعث جابه‌جایی بزرگ‌تری با نام BB' می‌شود. اما اگر دقت کنیم می‌بینیم که ما اصلاً چنین کاری نکرده‌ایم! ما مقدار جابه‌جایی BB' را مقدار ثابت t گرفته‌ایم و بر حسب این t مقدار کش‌آمدن لازم برای نخ را محاسبه کرده‌ایم! به نظرم اگر هم این کار درست باشد، دلیلی دارد و باید دلیل درستی این تغییر دیدگاه را بیان کنیم و الا من حق دارم بگویم که این محاسبه‌ها و کارهایی که تاکنون انجام داده‌ایم، ربطی به سؤال طرح‌شده ندارد.

من: خب بحث خیلی جدی شد. فرخنده مطلب مهمی را مطرح کرده، ولی وقتمان تمام است. پس جلسهٔ بعد به آن می‌پردازیم.